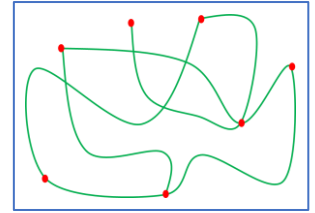


## LES GRAPHES PLANAIRES

### DEFINITIONS

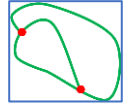
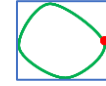
Un graphe  $G = (V, E)$  est défini par :

- ✓ Un ensemble de sommets  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$
- ✓ Un ensemble d'arêtes  $E = \{e_1, \dots, e_m\} \subseteq V \times V = \{(u, w) \mid u, w \in V\}$



### RAPPELS SUR LES GRAPHES

- Une **boucle** est une arête dont les extrémités coïncident.
- Si une arête apparaît plusieurs fois dans  $E$  alors il s'agit d'une **arête multiple**.
- Un graphe est dit **simple** s'il ne contient pas d'arêtes multiples ni de boucles.
- Un graphe est **k-connexe** s'il faut supprimer au moins  $k$  sommets pour qu'il ne soit plus connexe.



### PLONGEMENT DE GRAPHE

- Le **plongement** d'un graphe  $G=(V, E)$  dans un espace  $X$  est la donnée d'une injection  $V \rightarrow X$
- Et pour chaque arête  $a_i \in E$  un plongement  $P_{a_i} : [0, 1] \rightarrow X \in X$
- Où les extrémités coïncident avec l'injection de celles des sommets de départ et d'arrivée de  $a_i$  de sorte que les plongements de deux arêtes ne s'intersectent qu'en leurs extrémités communes
- Le plongement d'une arête est appelé **arc**.

### ALGORITHME DE GRAHAM

- Un **graphe planaire** est un graphe ayant au moins un plongement dans le plan (espace  $\mathbb{R}^2$ ) : Ce plongement est appelé **carte**.
- Un plongement d'un graphe dont tous les arcs sont polygonaux est dit **polygonaux** – ou **PL** (Piecewise Linear)
- Une **face** d'une carte est une composante connexe du complémentaire du plongement du graphe dans le plan qui est homéomorphe au disque ouvert de  $\mathbb{R}^2$ .

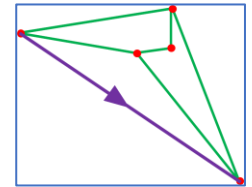
### RELATION D'EULER

- Les nombres  $F, E$  et  $V$  de faces, arêtes et sommets d'un graphe planaire polygonal connexe vérifient la relation :

$$F - E + V = 2$$

### ENRACINEMENT D'UNE CARTE

- L'enracinement d'une carte consiste à marquer et à orienter une arête de telle sorte qu'elle ait la face infinie (ou externe) à sa droite : une telle carte est dite enracinée.



### INCIDENCE

- Les relations d'incidences décrivent la manière dont les éléments d'une carte sont reliés :
  - ✓ Un sommet  $v$  et une arête  $e$  sont incidents lorsque  $v$  est une extrémité de  $e$
  - ✓ Une face  $f$  est incidente à une arête  $e$  (respectivement un sommet  $v$ ) si  $e$  (respectivement  $v$ ) appartient au bord de  $f$ .

### SIMPLEXE

- Un **simplexe** de dimension  $k$  est un polytope<sup>(1)</sup> constitué de l'enveloppe convexe de  $k + 1$  points indépendants dans l'espace de dimension  $d$ , pour  $k \leq d$ .

<sup>(1)</sup> Intersection d'un nombre fini de demi-espaces

### COMPLEXE SIMPLICIAL

- Un **complexe simplicial**  $C$  est un ensemble de simplexes vérifiant les deux conditions suivantes :
  - ✓ Toute face d'un simplexe de  $C$  est aussi un simplexe de  $C$  ;
  - ✓ L'intersection de deux simplexes est vide ou bien est constituée d'un simplexe de dimension inférieure (facette commune de dimension maximale).

### LOCALISATION DANS UN GRAPHE PLANAIRE

- Un **problème de localisation** se résume à :
  - ✓ Etant donnée un graphe planaire  $G$  et un point  $p$ 
    - ✓ Quelle est la face  $f$  de  $G$  qui contient le point  $p$  dans son intérieur ?